# Sujet de L3 Recherche

## Application des méthodes d'optimisation basées mesures à la surapproximation de zonotopes, en Caml

Les hiérarchies de Lasserre [3] sont des solutions élégantes, avec des résultats forts de convergence en volume, pour calculer des solutions approchées de problèmes d'optimisation. Le problème est exprimé dans un espace fonctionnel (de dimension infinie) puis projeté sur une base polynomiale de degré fixé. Le problème d'optimisation relaxé est convexe et peut-être résolu par l'utilisation de solveurs éprouvés (programmation linéaire/semi-définie positive). En augmentant le degré des polynômes la solution du problème relaxé tend vers la solution du problème initial. Cette méthode a été depuis appliquée dans de nombreux domaines et c'est aujourd'hui un axe très actif de recherche en optimisation.

Une étape primordiale consiste à formuler les contraintes via l'utilisation d'une matrice. En effet, la matrice de Gram nous permet d'exprimer un polynôme multivarié $P$ de degré $d$ sous la forme $x^\intercal M x$ où $x$ est un vecteur de monômes de degré au plus $d/2$ et $M$ une matrice carrée.

Cet outil peut alors être utilisé pour analyser des programmes ou des systèmes dynamiques [2]. Cependant, la formulation habituelle du problème nécessite des hypothèses fortes sur la forme de la solution du problème d'optimsation. Par exemple, il faut supposer que les états du programme ou du système évoluent dans un compact connu. Il est alors possible de définir la mesure de Lebesgue de ce compact et d'optimiser vis à vis de cette quantité.

Nous nous proposons ici d'effectuer un changement de base dans l'expression de la matrice de Gram et de permettre l'utilisation des polynômes de Hermite. Avec cette nouvelle configuration, le problème peut alors être défini vis à vis de la mesure Gaussienne. Cette mesure est mieux à même d'analyser des problèmes non bornés : elle a une valeur finie y compris pour des domaines non bornés.

**Cas d'étude:** Les zonotopes (i.e. l'image d'un hypercube par forme affine, voir Figure 1, [1]) sont un outil classique pour l'analyse d'atteignabilité de programmes. Il reste cependant compliqué de dessiner de tels ensembles : un zonotope de dimension $n$ peut posséder jusqu'à $2^n$ faces (avec $n = 1000$ pour certaines applications). Une solution consiste à surapproximer le zonotope par une ligne de niveau d'un polynôme (voir Figure 2) puis d'utiliser des outils d'analyse pour l'étude de cet ensemble. Trouver la surapproximation

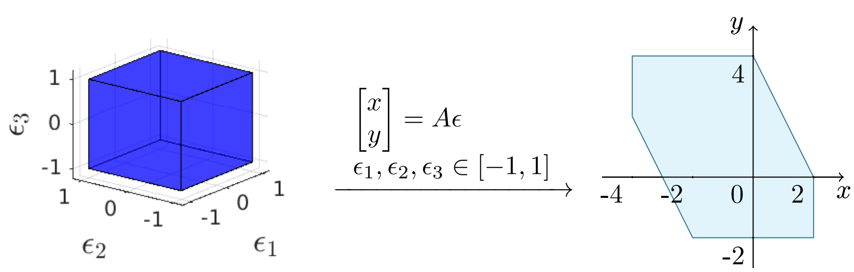


Figure 1: Zonotope

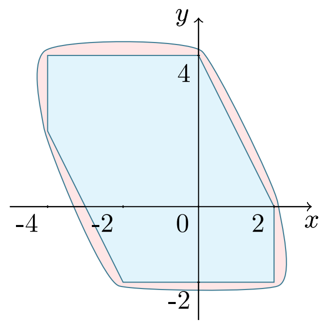


Figure 2: Surapproximation d'un zonotope (bleu) par un ensemble semi-algébrique (ligne de niveau du polynôme rouge)

de volume minimal peut-être formulé comme un problème d'optimisation en dimension infinie et donc être traité par des outils d'optimisation polynomiale.

Il vous sera donc demandé durant ce stage:

- d'écrire une librairie en Caml pour la manipulation de polynômes de Hermite (pour gérer les opérations d'addition et de multiplication);
- d'exprimer la matrice de Gram pour les polynômes de Hermite;
- de traduire le problème en un problème d'optimisation polynomiale;
- puis de faire appel à un solveur d'optimisation convexe;
- enfin, de traiter un exemple simple de surapproximation de zonotopes par une ligne de niveau polynomiale.

**Prérequis:** Caml

**Laboratoire:** Onera - Site de Toulouse


**Encadrants:** Paul Rousse (`Paul.Rousse@onera.fr`)
Pierre-Loïc Garoche (`Pierre-Loic.Garoche@onera.fr`)


# References


[1] Assalé Adjé, Pierre-Loïc Garoche, and Alexis Werey. Quadratic zonotopes. In *Asian Symposium on Programming Languages and Systems*, pages 127–145. Springer, 2015.

[2] Victor Magron, Pierre-Loic Garoche, Didier Henrion, and Xavier Thirioux. Semidefinite Approximations of Reachable Sets for Discrete-time Polynomial Systems. *arXiv e-prints*, page arXiv:1703.05085, March 2017.

[3] Mihai Putinar. Jean bernard lasserre: Moments, positive polynomials and their applications. *Foundations of Computational Mathematics*, 11(4), 2011.